

Grootste gemene deler

De **grootste gemene deler** of **grootste gemeenschappelijke deler** (gemeen is een oudere term voor gemeenschappelijk^[1]), afgekort tot **ggd**, van een aantal gehele getallen (waarvan er ten minste een ongelijk is aan 0) is het grootste positieve gehele getal, waar al deze gehele getallen door gedeeld kunnen worden zonder dat er een rest overblijft. De grootste gemene deler van de getallen 8 en 12 is bijvoorbeeld 4. De grootste gemene deler wordt wel genoteerd als de functie **ggd**(. .).

Inhoud

Voorbeelden

Bepaling

Gebruik

Voorbeeld

Eigenschappen

Relatief priem

Product ggd en kgv van twee getallen gelijk aan product

Grootste gemene deler in verschillende getallenverzamelingen

Voorbeelden

Voorbeelden

- De grootste gemene deler van 6 en 12 is het getal 6.

6 is het grootste gehele getal waardoor 6 en 12 gedeeld kunnen worden.

- De grootste gemene deler van 15 en 20 is het getal 5; notatie

$$\text{ggd}(15, 20) = 5$$

- De grootste gemene deler van 6, 9 en 12 is 3; notatie

$$\text{ggd}(6, 9, 12) = 3$$

Bepaling

Bovenstaande voorbeelden zijn eenvoudig, maar bij grotere getallen is het niet direct duidelijk wat de ggd is. De ggd wordt bijvoorbeeld bepaald door beide getallen te ontbinden in priemfactoren. Dat wil zeggen dat van beide getallen wordt bepaald door welke priemgetallen ze deelbaar zijn. Daarbij wordt achtereenvolgens van elk priemgetal geprobeerd of dit een deler is. Als een getal meerdere malen door hetzelfde priemgetal deelbaar is, wordt dit evenzo veel malen genoteerd.

Vervolgens worden alle gemeenschappelijke priemfactoren met elkaar vermenigvuldigd. Het resultaat is de ggd. Een voorbeeld maakt dit duidelijk:

Het getal 24 is deelbaar door de priemgetallen 2 en 3 want 24 is gelijk aan $2 \times 2 \times 2 \times 3$.

Het getal 204 is deelbaar door de priemgetallen 2, 3 en 17, en wel is $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$. De grootste gemene deler van 24 en 204 is dus $2 \times 2 \times 3 = 12$.

Een efficiënt algoritme (rekenmethode) voor het bepalen van de ggd is het algoritme van Euclides. Voor grote getallen is dit algoritme te verkiezen boven de methode met het ontbinden in factoren. Het is namelijk heel lastig (zelfs voor computers) om een groot getal in factoren te ontbinden als die factoren zelf ook grote getallen zijn.

Gebruik

Bij het vereenvoudigen van een breuk is het handig om de ggd van de teller en de noemer te bepalen. Zowel teller als noemer kunnen dan door hun ggd worden gedeeld en zo verkrijgt men direct de grootst mogelijke vereenvoudiging. De breuk $24/204$ wordt zo vereenvoudigd tot $(24/12)/(204/12) = 2/17$. (Een breuk van twee getallen die relatief priem zijn, kan niet vereenvoudigd worden.)

Voorbeeld

Vereenvoudig $75/105$.

$$\begin{aligned} 75 &= 3 \times 5 \times 5 \\ 105 &= 3 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

De ggd van 75 en 105 is dus $3 \times 5 = 15$.

Vereenvoudiging:

$$\frac{75}{105} = \frac{75/15}{105/15} = \frac{5}{7}$$

Eigenschappen

Stel dat d de ggd is van a en b . Dan geldt onder meer voor d :

1. Iedere gemene (gemeenschappelijke) deler van a en b is ook een deler van d .
2. d is het kleinste positieve getal dat uitgedrukt kan worden als $xa + yb$ voor zekere gehele getallen x en y . Zie daarvoor het uitgebreide algoritme van Euclides.

Relatief priem

Een paar getallen waarvan de ggd gelijk is aan 1 wordt relatief priem genoemd.

Product ggd en kgv van twee getallen gelijk aan product

Het product van de ggd en het kleinste gemene veelvoud van twee positieve gehele getallen is gelijk aan het product van die twee gehele getallen zelf. Zo geldt voor de getallen 15 en 20:

$$\text{ggd}(15, 20) \times \text{kgv}(15, 20) = 5 \times 60 = 300 = 15 \times 20.$$

Grootste gemene deler in verschillende getallenverzamelingen

Niet alleen van een aantal natuurlijke getallen kan een grootste gemene deler bepaald worden, ook van elementen van een hoofdideaaldomein. Dit volgt uit de nu volgende generalisatie van de stelling van Bachet-Bézout.

Zij R een hoofdideaaldomein en $a_1, \dots, a_n$ elementen uit R . Dan bestaat er een grootste gemene deler d van $a_1, \dots, a_n$. Bovendien bestaan er elementen $r_1, \dots, r_n$ uit R zodat

$$d = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n.$$

De grootste gemene deler is uniek op eenheden na: als c en d grootste gemene delers zijn van $a_1, \dots, a_n$, dan bestaat er een eenheid e zodat $c = de$.

In een uniek factorisatiedomein kan men ook een grootste gemene deler bepalen met de hierboven vermelde methode van het ontbinden in factoren.

Voorbeelden

- De ggd van twee gehele getallen kan volgens bovengenoemde stelling geschreven worden als geheeltallige lineaire combinatie van de beide getallen. Zo geldt voor de getallen 75 en 105;

$$\text{ggd}(75, 105) = 15 = 3 \times 75 - 2 \times 105$$

Omdat $7 \times 75 - 5 \times 105 = 0$, zijn er ook andere combinaties mogelijk; bijvoorbeeld:
 $15 = 10 \times 75 - 7 \times 105 = -4 \times 75 + 3 \times 105$

- De generalisatie behelst de ggd van *meer dan twee* getallen. Voor de getallen 18, 60 en 72 geldt:

$$\text{ggd}(18, 60, 72) = 6 = 18 + 60 - 72 = 3 \times 18 + 4 \times 60 - 4 \times 72.$$

Bronnen, noten en/of referenties

- Gemeen (<https://www.woordenboeken.nu/betekenis/nl/gemeen>), [woordenboeken.nu](https://www.woordenboeken.nu)

Overgenomen van "https://nl.wikipedia.org/w/index.php?title=Grootste_gemene_deler&oldid=52950995"

Deze pagina is voor het laatst bewerkt op 7 jan 2019 om 18:50.

De tekst is beschikbaar onder de licentie Creative Commons Naamsvermelding/Gelijk delen, er kunnen aanvullende voorwaarden van toepassing zijn. Zie de gebruiksvoorwaarden voor meer informatie.
Wikipedia® is een geregistreerd handelsmerk van de Wikimedia Foundation, Inc., een organisatie zonder winstoogmerk.